О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ОБЛАСТЯХ С "НЕРОВНОЙ" ГРАНИЦЕЙ [1]

Е.К. Липачёв (Казань)

В работе рассмотрены вопросы разрешимости краевых задач для уравнения Гельмгольца с условиями Дирихле, Неймана и сопряжения на границе полуплоскости, содержащей конечное включение. Термин "неровная" граница заимствован из работ [1] — [3], хотя используется здесь в более узком смысле. Исследование проведено по единой схеме, согласно которой вначале доказывается единственность решения краевой задачи, затем с помощью обобщенных потенциалов производится сведение задачи к однозначно разрешимому уравнению Фредгольма второго рода, после чего доказывается эквивалентность полученного интегрального уравнения и краевой задачи. Алгоритмы численного решения краевых задач строятся на основе приближения сплайнами решения интегрального уравнения.

Постановка задач и единственность решения. На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим кривую $\Gamma = \gamma \cup \gamma^*$, где $\gamma = \{(x,0) : x \in \mathbb{R} \setminus [-a,a]\}$, а через γ^* обозначен "неровный" участок:

$$\gamma^* = \{(x, \Phi(x)) : x \in [-a,a]\},$$

$$\Phi(x) \in C^{(2)}[-a,a], \quad \Phi(-a) = \Phi(a) = 0.$$

Кривая Γ разбивает плоскость на две области

$$S \equiv S_1 = \{(x,y) : y > 0, x \in \mathbb{R} \setminus [-a,a]; y > \Phi(x), x \in [-a,a]\},$$

$$S_2 = \{(x,y) : y < 0, x \in \mathbb{R} \setminus [-a,a]; y < \Phi(x), x \in [-a,a]\}.$$

Обозначим через $\nu = \nu(x,y)$ единичный вектор нормали к Γ в точке (x,y), а через $\partial_\nu = \partial_{\nu(x,y)}$ правильную нормальную производную по направлению этого вектора (см., напр., [4]). Чтобы

[1]Работа выполнена при поддержке фонда НИОКР РТ (грант 05-5.1-16.2002 (Ф))

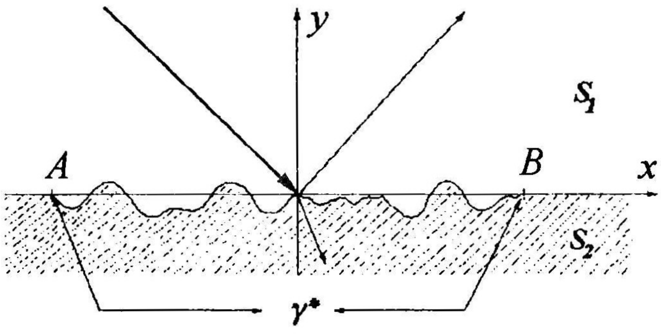

Рис. 1. Геометрия задачи.

зафиксировать направление нормали, будем считать, что вектор ν расположен в области S.

Сформулируем краевые задачи в области S.

Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(x,y) + k^2 u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in S, \tag{1}$$

одному из граничных условий

$$u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \partial S \equiv \Gamma, \tag{2}$$

или

$$\partial_\nu u(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma, \tag{2'}$$

условию на ребре (см., напр., [5]) в точках $A = (-a, 0)$ и $B = (a, 0)$ и условию излучения на бесконечности

$$(u - \widetilde{u}) = e^{ikr} O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),$$

$$\frac{\partial (u - \widetilde{u})}{\partial r} - ik(u - \widetilde{u}) = e^{ikr} o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \to \infty. \tag{3}$$

Здесь $f \in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$, $g \in C^{(0,\alpha)}(\Gamma)$ $(0 < \alpha \leq 1)$ — известные функции, а через $\widetilde{u}$ обозначено решение краевой задачи на полуплоскости.

Задача сопряжения состоит в нахождении функций $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца

$$\Delta u_j(x,y) + k_j^2 u_j(x,y) = 0, \quad (x,y) \in S_j, \quad j = 1,2, \tag{4}$$

условиям сопряжения на границе раздела областей S_1 и S_2:

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,y) - u_2(x,y) &= f(x,y), \\ p_1 \partial_\nu u_1(x,y) - p_2 \partial_\nu u_2(x,y) &= g(x,y), \end{aligned}\right. \quad (x,y) \in \Gamma, \tag{5}$$

где $f \in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$, $g \in C^{(0,\alpha)}(\Gamma)$ $(0 < \alpha \leq 1)$ — известные функции, а p_1, p_2 — известные величины. Кроме того, предполагаем, что функции $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ удовлетворяют условию на ребре в точках A и B, а также условиям излучения вида (3).

Отметим, что исследование задачи сопряжения на полуплоскости (в этом случае граница Γ совпадает с $\mathbb{R}$) проведено в [6], [7].

Приведенные краевые задачи моделируют ряд физических задач (некоторые примеры содержатся в [1], [7]).

Согласно [8] под классическим решением краевой задачи (1) — (3) будем понимать функцию $u \in C^2(S) \cap C\left(\overline{S}\right)$, удовлетворяющую условиям задачи.

В случае наличия ребер в точках A и B, требуем, чтобы $u \in C^2(S) \cap C\left(\overline{S} \setminus \Gamma_\delta\right)$ (в [9] такие решения названы квазиклассическими). Здесь через Γ_δ обозначено объединение δ-окрестностей точек A и B. Аналогично определяются классические решения задачи сопряжения.

Теорема 1. *При условиях* $\operatorname{Im} k > 0$, $\operatorname{Re} k \neq 0$ *или* $\operatorname{Im} k = 0$, $\operatorname{Re} k > 0$ *краевая задача (1) — (3) имеет не более одного классического решения.*

Доказательство проводится по известной схеме [8, 10] и опирается на технику формул Грина, примененных в областях $S_R = S \cap \Sigma_R$ $(\Sigma_R = (x,y) : x^2 + y^2 < R)$. Для однородной краевой задачи в пределе при $R \longrightarrow \infty$ имеем

$$i\,(2 \operatorname{Re} k \cdot \operatorname{Im} k) \iint_{S_R} |u|^2 \, d\sigma + i\,(\operatorname{Re} k) \int_{\Sigma_R^+} |u|^2 \, ds \longrightarrow 0.$$

При $\operatorname{Im} k > 0$, $\operatorname{Re} k \neq 0$ оба слагаемых имеют одинаковые знаки и, следовательно, стремятся к 0, что означает $u \equiv 0$. При $\operatorname{Im} k = 0$, $\operatorname{Re} k > 0$ утверждение теоремы следует из леммы Реллиха ([8], с. 88).

Теорема 2. *При условиях* $\operatorname{Im} k_j \geq 0$ *(*$j = 1, 2$*) и* $(\operatorname{Re} k_1) \cdot (\operatorname{Re} k_2) > 0$ *задача сопряжения имеет не более одного классического решения.*

Сведение краевых задач к интегральным уравнениям. Положим

$$G_m(k; M, P) = \frac{\pi i}{2}\left\{H_0^{(1)}(kr) + (-1)^m H_0^{(1)}(kr^*)\right\}, \quad m = 1, 2, \tag{6}$$

где $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля 1-рода, $M = (x, y)$, $P = (\tau, \xi)$ и

$$r = \sqrt{(x-\tau)^2 + (y-\xi)^2}, \quad r^* = \sqrt{(x-\tau)^2 + (y+\xi)^2}.$$

Введем потенциалы простого и двойного слоя

$$v(x, y) = (V(k)\varphi)(x, y) = \int_{\gamma^*} G_2(k; M, P)\varphi(\tau)\, ds_P, \tag{7}$$

$$w(x, y) = (W(k)\psi)(x, y) =$$
$$= \int_{\gamma^*} \partial_{\nu(P)} G_1(k; M, P)\psi(\tau)\, ds_P, \quad M \notin \gamma^*, \tag{8}$$

с плотностями φ, $\psi \in \dot{C}[-a, a]$ (т.е. функции φ, ψ непрерывны и $\operatorname{supp}\varphi, \operatorname{supp}\psi \subset [-a, a]$). Заметим, что в (7) и (8) интегрирование производится по участку границы (в [5], [11] такие потенциалы названы "обобщенными"). Потенциалы (7), (8) обладают теми же свойствами, что и классические потенциалы (см., напр., [4], [8]).

Решение краевой задачи (1) – (3) будем искать в виде

$$u(x, y) = \tilde{u}(x, y) + (W(k)\varphi_E)(x, y) \tag{9}$$

в случае условия Дирихле на границе и

$$u(x, y) = \tilde{u}(x, y) + (V(k)\varphi_H)(x, y) \tag{10}$$

в случае задачи Неймана.

Отметим, что на участке границы $\gamma = \Gamma \setminus \gamma^*$ функции $W(k)\varphi_E$ и $\partial_\nu \left(V(k)\varphi_H\right)$ имеют нулевые значения. На основании свойств потенциалов, из краевых условий (2) и (2′) получаем интегральные уравнения

$$K\varphi_{E/H} \equiv \left(\pi I - T_{E/H}\right)\varphi_{E/H} = \rho_{E/H}, \tag{11}$$

где

$$\left(T_E\varphi_E\right)(x) = \left[W(k)\varphi_E\right](x, \Phi(x)), \quad x \in [-a, a], \tag{12}$$

прямое значение потенциала двойного слоя и

$$\left(T_H\varphi_H\right)(x) = \partial_{\nu(x,\Phi(x))}\left[V(k)\varphi_H\right](x, \Phi(x)), \quad x \in [-a, a], \tag{13}$$

прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя (см., напр., [4], [8]),

$$\rho_E = -f + \widetilde{u}, \quad \rho_H = -g + \partial_{\nu(x,\Phi(x))}\widetilde{u}.$$

В случае задачи сопряжения предполагаем, что решение представимо в виде

$$u_j(x, y) = \widetilde{u}_j(x, y) + \frac{1}{p_j}\left\{W(k_j)\varphi + V(k_j)\psi\right\}(x, y), \quad j = 1, 2. \tag{14}$$

Функции φ и ψ определяются из системы интегральных уравнений, полученной из условий сопряжения, с учетом формул о "скачке" для потенциалов:

$$U\Psi \equiv (E - T)\Psi = F, \tag{15}$$

где

$$\Psi = (\varphi, \psi)^t, \ F \equiv (F_1, F_2)^t = \left(f - \widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2, g - p_1\partial_\nu\widetilde{u}_1 + p_2\partial_\nu\widetilde{u}_2\right)^t.$$

Здесь через $(\cdot)^t$ обозначена операция транспонирования, а операторы E и T определяются соотношениями

$$E = \begin{pmatrix} -\pi\left(1/p_1 + 1/p_2\right)I & 0 \\ 0 & 2\pi I \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

В (16) через I обозначен единичный оператор и

$$T_{11}\varphi = \frac{1}{p_2}[W(k_2)\varphi] - \frac{1}{p_1}[W(k_1)\varphi],$$

$$T_{12}\psi = \frac{1}{p_2}V(k_2)\psi - \frac{1}{p_1}V(k_1)\psi,$$

$$T_{21}\varphi = \partial_{\nu(x,\Phi(x))}(W(k_2) - W(k_1))\varphi,$$

$$T_{22} = \partial_{\nu(x,\Phi(x))}[V(k_2)\psi] - \partial_{\nu(x,\Phi(x))}[V(k_1)\psi].$$

Теорема 3. *В условиях теоремы 1 однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (11), имеет только тривиальное решение.*

Теорема 4. *В условиях теоремы 2 однородная система интегральных уравнений, соответствующая системе (15), имеет только тривиальное решение.*

Свойства ядер, зависящих от функций Ханкеля и их производных, хорошо известны (см., напр., [10], [12], [13]). На основе исследования ядер интегральных уравнений (11) и системы интегральных уравнений (15) доказывается фредгольмовость уравнений. Это следует из того, что на основании свойств логарифмического потенциала, ядро интегрального уравнения (11), а также ядра операторов $(T_{11}\varphi)$ и $(T_{22}\varphi)$ системы (15), при совпадении аргументов M и P ($M = (x, \Phi(x))$, $P = (\tau, \Phi(\tau)) \in \gamma^*$), можно доопределить до непрерывных функций (см., напр., [12]). Далее, ядро интегрального оператора $(T_{12}\varphi)$ при $M \to P$ имеет ту же особенность, что и функция $(1/p_1 - 1/p_2)\ln r_{MP}$. Особенность ядра оператора $(T_{21}\varphi)$ определяется разностями

$$k_1^2 H_0^{(1)}(k_1 r_{MP}) - k_2^2 H_0^{(1)}(k_2 r_{MP}),\ k_1 H_1^{(1)}(k_1 r_{MP}) - k_2 H_1^{(1)}(k_2 r_{MP}),$$

$$k_1^2 H_2^{(1)}(k_1 r_{MP}) - k_2^2 H_2^{(1)}(k_2 r_{MP}).$$

Первая разность при $M \to P$ имеет ту же особенность, что и функция $\left(k_1^2 - k_2^2\right)\ln r_{MP}$, а оставшиеся разности при $M \to P$ асимптотически равны 0.

После чего, на основании альтернативы Фредгольма, делается заключение о существовании решения интегрального уравнения.

Теорема 5. *В условиях теоремы 1, справедливы следующие утверждения.*

Всякое решение $u(x,y)$ краевой задачи (1) — (3) представимо в виде (9), (10), где функции $\varphi_{E/H}(x)$ являются решением интегрального уравнения (11).

С другой стороны, если $\varphi(x)$ — решение уравнения (11), то функция $u(x,y)$, построенная по формулам (9), (10) с плотностью $\varphi(x)$, является решением краевой задачи (1) — (3).

Аналогичная теорема эквивалентости имеет место и для задачи сопряжения.

Вычислительная схема. Из теоремы эквивалентности следует, что приближенное решение краевой задачи строится на основе решения интегрального уравнения, найденного с помощью какого-либо приближенного метода. В данной работе интегральные уравнения решались сплайновыми методами.

На отрезке $[-a,a]$ рассмотрим произвольную сетку узлов

$$-a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < a, \quad n = 1,2,\ldots,$$

удовлетворяющую условию

$$\delta_n = \max_{1\le j\le n}(x_j - x_{j-1}) \to 0, \quad n\to\infty.$$

Приближенное решение интегрального уравнения (11) ищем в виде сплайна

$$\varphi_n^l(x) = \sum_{j=0^l}^{n} c_j s_j^l(x), \quad 0^0 = 1, \tag{17}$$

который определим как точное решение уравнения

$$K_n\varphi_n^l \equiv P_n^l K\varphi_n^l = P_n^l\rho_{E/H} \equiv \rho_n. \tag{18}$$

Здесь $s_j^l(x)$ — фундаментальные сплайны степени l, а P_n^l — оператор сплайн–интерполяции.

Рассмотрим вычислительные схемы на основе сплайнов нулевой и первой степеней.

Фундаментальные сплайны $s_j^0(x)$ определяются как характеристические функции интервалов $(x_{j-1}, x_j]$, а фундаментальные сплайны первой степени задаются формулами

$$s_j^1(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_{j-1}, \\ \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x_{j-1} \le x \le x_j, \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, & x_j \le x \le x_{j+1}, \\ 0, & x \ge x_{j+1}, \end{cases}$$

для $j = \overline{1, n}$.

Неизвестные коэффициенты c_j $(j = 0^l, \ldots, n; l = 0, 1)$ определяем, согласно методу коллокации, из системы линейных алгебраических уравнений

$$c_j + \sum_{k=0^l}^{n} \alpha_{jk} c_k = g_j, \quad j = 0^l, \ldots, n, \tag{19}$$

где введены обозначения

$$g_j = \rho_{E/H}\left(x_j, \Phi(x_j)\right), \quad j = 0^l, \ldots, n,$$

$$\alpha_{jk} = \left(T_{E/H} s_k^l\right)(x_j), \quad j, k = 0^l \ldots, n.$$

Обоснование методов приближенного решения уравнения (11) проведено с помощью теоремы 7 гл. I [14]. Согласно этой теореме, если для уравнений $K\varphi = \rho$ и $K_n\varphi_n = \rho_n$ выполнены условия: i) оператор K ограниченно обратим; ii) $\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\| \to 0$ и $\delta_n \equiv \|\rho - \rho_n\| \to 0$, $n \to \infty$, то для всех $n \in \mathbb{N}$, таких, что $q_n \equiv \left\|K^{-1}\right\| \varepsilon_n < 1$, уравнения $K_n\varphi_n = \rho_n$ однозначно разрешимы и $\left\|K_n^{-1}\right\| \le \left\|K^{-1}\right\| / (1 - q_n)$, $\|\rho - \rho_n\| = O\left(\varepsilon_n + \delta_n\right) \to 0$ при $n \to \infty$.

Поскольку установлена однозначная разрешимость интегрального уравнения (11), то выполнено условие i) указанной теоремы. Справедливость условия ii) следует из результатов работы [15].

Теорема 6. *В условиях теоремы 1 существует положительное целое число n_0, такое, что при $n \geq n_0$ система (19) имеет единственное решение $\{c_j^*\}$ и приближенные решения $\varphi_n^l(x)$ $(l = 0; 1)$, построенные по формуле (17) при $c_j = c_j^*$, сходятся к точному решению φ^* интегрального уравнения (11).*

Приближенное решение системы интегральных уравнений (15) ищем в виде сплайнов

$$\varphi_n^l(x) = \sum_{j=0^l}^{n} c_j^l s_j^l(x), \quad \psi_n^l(x) = \sum_{j=0^l}^{n} d_j^l s_j^l(x), \quad l = 0, 1, \quad 0^0 = 1, \tag{20}$$

которые являются решением уравнения

$$U_n \Psi_n \equiv \overline{P}_n^l U \Psi_n = \overline{P}_n^l F, \tag{21}$$

в котором

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} \varphi_n^l \\ \psi_n^l \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad \text{и } \overline{P}_n^l = \begin{pmatrix} P_n^l \\ P_n^l \end{pmatrix},$$

где P_n^l — оператор сплайн-интерполяции.

Неизвестные коэффициенты c_j^l, d_j^l $(j = 0^l, \ldots, n; l = 0, 1)$ определяем из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} c_j^l + \textstyle\sum_{k=0^l}^{n} \left(c_k^l \alpha_{jk}^l + d_k^l \beta_{jk}^l\right) &= F_1(x_j), \\ d_j^l + \textstyle\sum_{k=0^l}^{n} \left(c_k^l \sigma_{jk}^l + d_k^l \zeta_{jk}^l\right) &= F_2(x_j), \end{aligned} \qquad j = \overline{0^l, n}, \tag{22}$$

где

$$\alpha_{jk}^l = \left(T_{11} s_k^l\right)(x_j), \quad \beta_{jk}^l = \left(T_{12} s_k^l\right)(x_j),$$

$$\sigma_{jk}^l = \left(T_{21} s_k^l\right)(x_j), \quad \zeta_{jk}^l = \left(T_{22} s_k^l\right)(x_j).$$

Обоснование приближенного метода проводится по той же схеме, что и ранее.

Теорема 7. *В условиях теоремы 2 при всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого, сплайн-функции $\varphi_n^l(x)$, $\psi_n^l(x)$, определяемые методом сплайн-коллокации (20)-(22), существуют и единственны. Функции $(\varphi_n^l(x),\ \psi_n^l(x))$ сходятся к точному решению $(\varphi^*(x),$ $\psi^*(x))$ системы интегральных уравнений (15).*

Литература

[1] Басс Ф. Г., Фукс И.М. *Рассеяние волн на статистически неровной поверхности.* М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. - 424 с.

[2] Басс Ф. Г., Крутинь Ю. И., Сиренко Ю. К., Тучкин Ю. А., Шестопалов В. П. *Возможность строгого расчета рассеянных произвольными и случайными поверхностями полей с использованием алгоритмов метода аналитической регуляризации* // Электромагнитные волны и электронные системы. - 1997. - Т. 2, No. 1. - С. 5 - 17.

[3] Лысанов Ю. П. *Об одном приближенном решении задачи рассеяния звуковых волн на неровной поверхности* // Акуст. журн. - 1956. - Т. II, No. 2. - С.182-187.

[4] Мазья В. Г. *Граничные интегральные уравнения* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 27. - М.: ВИНИТИ АН СССР, 1988. - С.131-228.

[5] Ильинский А. С., Шестопалов Ю. В. *Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн.* - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. - 184 с.

[6] Плещинский Н. Б. *Метод преобразования Фурье в задачах сопряжения электромагнитных полей.* Труды Матем. цен-

тра им. Н.И. Лобачевского. Т. 6. – Казань: Казан. матем. общество, 2000. – С.153–185.

[7] Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. *Теоретические основы акустики океана.* – Л.: Гидрометеоиздат, 1982.

[8] Колтон Д., Кресс Р. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.* – М.: Мир, 1987. – 311 с.

[9] Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. *Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции).* – М.: ИПРЖР, 1996. – 176 с.

[10] Kress R., Roach G. F. *Transmission problems for the Helmholtz equation* // J. Math. Phys. – 1978. – 19, No. 6. – P.1433–1437.

[11] Шестопалов Ю. В. *Применение метода обобщенных потенциалов для решения некоторых задач теории дифракции и распространения волн* // Журн. выч. матем. и мат. физики. – 1990. – 30, No. 7. – С.1081–1092.

[12] Галишникова Т. Н., Ильинский А. С. Численные методы в задачах дифракции. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 208 с.

[13] Дмитриев В. И., Захаров Е. В. *Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 167 с.

[14] Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

[15] Габдулхаев Б. Г. *Аппроксимация полиномами и сплайнами решений слабо сингулярных интегральных уравнений* // Теория приближения функций. – М.: Наука, 1977. – С.89–93.